JULIO 2020

SOLUCIÓN OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ \quad -y + z = a \end{cases}$$ Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$

a) Escribimos la matriz A y la ampliada A^*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Hacemos determinante de A e igualamos a 0.

$|A| = 1 + a + 0 - 0 + a^2 - 1 = a^2 + a$

$a^2 + a = 0; \quad a \cdot (a + 1) = 0; \quad \begin{cases} a = 0 \\ a + 1 = 0; \quad a = -1 \end{cases}$

Aplicamos el teorema de Rouche:

· $Si\ a \neq 0\ y\ a \neq -1$ entonces $|A| \neq 0$, entonces $R(A) = 3$, por lo que $R(A^*) = 3$, siendo el número de incógnitas = 3

$R(A) = R(A^*) = número\ de\ incógnitas.$

Sistema Compatible Determinado. Una única solución.

· $Si\ a = 0$, lo resuelvo por Gauss, pero se puede por determinantes. Sustituto la a por un 0 en A^*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} f3 + f2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R(A) = 2; \quad R(A^*) = 2; \quad nº incógnitas = 3$$

$R(A) = R(A^*) \neq número\ de\ incógnitas.$ Sistema Compatible Indeterminado. Infinitas soluciones.

· $Si\ a = -1$, lo resuelvo por Gauss, pero se puede por determinantes. Sustituto la a por un -1 en A^*

$$A^* \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad f2 - f1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} 2f3 + f2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 2; \quad R(A^*) = 3; \quad nº incógnitas = 3 \quad R(A) \neq R(A^*).$ Sistema Incompatible. No hay solución.

b) Sustituyo la a por un 0. Ya tenemos hecho el Gauss del apartado a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} f3 + f2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ de solución sale: $x = 1 - \lambda, \ y = \lambda, \ z = \lambda$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima

c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

a) El teorema que vamos a utilizar es el de Bolzano. Según han dicho, debe ocurrir que haya un punto donde f(x) de lo mismo que g(x), es decir; f(x) = g(x). Nos vamos a sacar esta ecuación y la vamos a llamar h(x)
$f(x) = g(x); \quad paso\ la\ g(x)\ a\ la\ izquierda: f(x) - g(x) = 0.$
Vamos a llamar $h(x) = f(x) - g(x) = 0$. Y ya tenemos la primera condición: que h(x) = 0
$h(x) = x^3 + 3x^2 - 1 - 6x$
Ahora, para que se cumpla Bolzano, debe ocurrir que h(x) sea continua en el intervalo $[1, 10]$, y además, que al sustituir por 1 y por 10 en h(x), un valor de negativo y el otro positivo, y eso significará que existe un valor c que pertenece a ese intervalo que hace que $h(c) = 0$
Lo primero, h(x) es continua en el intervalo $[1, 10]$ porque es polinómica.
$h(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 6 \cdot 1 = -3 < 0$
$h(10) = 10^3 + 3 \cdot 10^2 - 1 - 6 \cdot 10 = 1239 > 0$

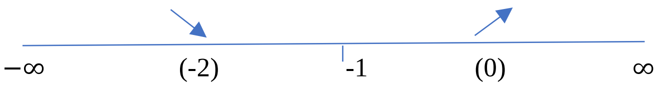
Por tanto podemos decir que se cumple el teorema de Bolzano y que existe un valor c en ese intervalo que hará que f(c)=g(c)

b) La fórmula de la recta tangente: $y = m(x - a) + b$ donde m es la pendiente. Resulta que la pendiente es la primera derivada de la función
$m = f'(x) \qquad m = f'(x) = 3x^2 + 6x$
Como me piden que la pendiente sea un mínimo, se calcula derivando la pendiente e igualamos a cero:

$m' = 6x + 6; \quad 6x + 6 = 0; \quad 6x = -6; \quad x = -1\ posible\ máx\ o\ mín$

Comprobamos si es un mínimo. Se puede hacer con la recta real, o con la segunda derivada. Yo lo voy a hacer con la recta real:

Comprobamos que en x = -1 se encuentra el valor mínimo:



m′(-2) = 6·(-2) +6 < 0 decrece m′(0) = 6·0 + 6 > 0 crece Hay un mínimo para x = -1

Sacamos la pendiente mímina: $m = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = -3$

Y sacamos el punto entero sustituyendo el f(x)

$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 1 = -1 + 3 - 1 = 1 \quad P(-1,1)$

Sustituimos en la fórmula de la recta tangente: $y = m(x - a) + b$

$y = -3\big(x - (-1)\big) + 1; \quad y = -3(x + 1) + 1; \quad y = -3x - 3 + 1; \boxed{y = -3x - 2}$

c)

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx = \int_1^2 \frac{x^3}{6x} dx + \int_1^2 \frac{3x^2}{6x} dx + \int_1^2 \frac{1}{6x} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{6} dx + \int_1^2 \frac{x}{2} dx + \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{1}{x} dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{6} \cdot ln|x|\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{18} + \frac{2^2}{4} + \frac{1}{6} \cdot ln|2|\right) - \left(\frac{1^3}{18} + \frac{1^2}{4} + \frac{1}{6} \cdot ln|1|\right) = \frac{13}{9} + \frac{ln2}{6} - \frac{11}{36} = \boxed{\frac{41}{36} - \frac{ln2}{6}}$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas

$$r: \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P(2,-1,5).

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

a) Paso la recta r a paramétrica. Doy valor y = λ

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases}$$ Ahora sacamos un punto y un vector tanto de r como de s.

$$r: \begin{cases} P(2,0,7) \\ \vec{r}(1,1,3) \end{cases} \quad s: \begin{cases} Q(-1,-4,0) \\ \vec{s}(2,-1,1) \end{cases}$$ Sacamos el vector $\overrightarrow{PQ}(-3,-4,-7)$

Ya nos podemos hacer la matriz M^* con los vectores $\vec{r}, \vec{s}\ y\ \overrightarrow{PQ}$ y hacer su rango

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2f1 - f2 \\ 3f1 + f3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} 3f3 + f2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} r(M^*) = 3$$ Por tanto, las rectas se cruzan

b) Como el plano es perpendicular a r, entonces $\vec{n} = \vec{r} = (1,1,3)$ y pasa por P(2,-1,5). Nos vamos a la ecuación general del plano:

$Ax + By + Cz + D = 0, \quad la\ A, B\ y\ C\ son\ los\ números\ del\ vector\ normal\ del\ plano. Sustituyo:$

$x + y + 3z + D = 0 \quad Ahora\ introduzco\ el\ punto\ P\ en\ el\ plano\ para\ sacar\ D:$

$2 - 1 + 3 \cdot 5 + D = 0, \quad D = -16 \quad por\ tanto\ la\ ecuación\ del\ plano\ queda:$ $\boxed{x + y + 3z - 16 = 0}$

c) Como el plano es paralelo a r, el vector de r es el vector del plano $\vec{r} = (1,1,3)$

Como contiene a s, el vector y el punto de s son del plano: $\begin{matrix} Q(-1,-4,0) \\ \vec{s}(2,-1,1) \end{matrix}$. Ya tenemos un punto y dos vectores. Hago la ecuación que quiera:

$$\boxed{\pi: \begin{cases} x = -1 + \lambda + 2\mu \\ y = -4 + \lambda - \mu \\ z = 3\lambda + \mu \end{cases}}$$

Ejercicio 4: Calificación máxima: 2.5 puntos.

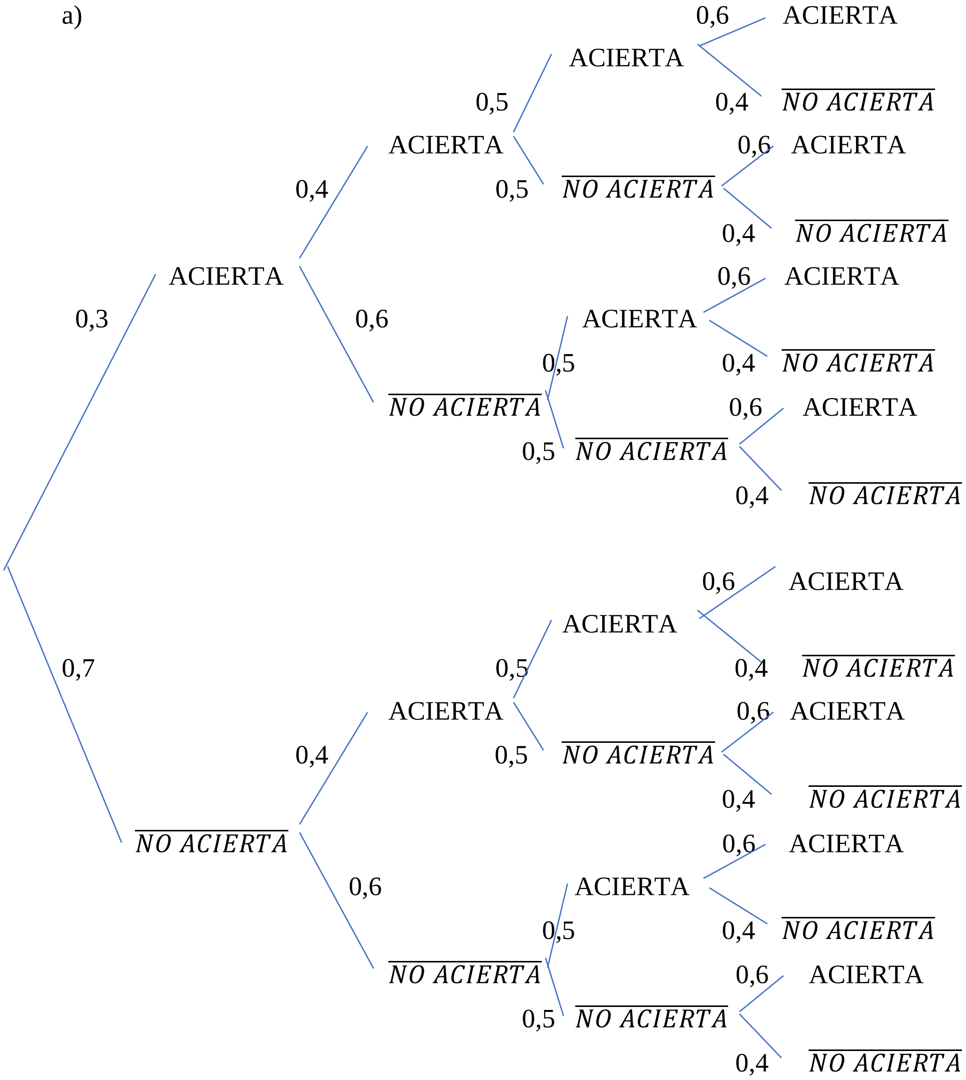
Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de la diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

a)



a) P(acertar antes del cuarto disparo)= probabilidad de acertar en el primero + probabilidad de acertar en el segundo + probabilidad de acertar en el tercero = 0,3 + 0,7·0,4 + 0,7·0,6·0,5 = $\boxed{0,79}$

b) P(no acertar ninguna) = probabilidad de no acertar en los cuatro tiros = 0,7·0,6·0,5·0,4 = $\boxed{0,084}$

c) Esto es un apartado de binomial. La fórmula es:

$P(x=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$ Queremos la probabilidad de que acierten 6 a la primera, por tanto, me piden P(x = 6)

$$n=10\ tiros\ en\ total;\ k=6\ aciertos\ de\ los\ 10\ tiros;\quad p=0{,}85;\ \ q=1-p=0{,}15$$

$P(x=6)=\binom{10}{6}\cdot 0{,}85^6\cdot 0{,}15^{10-6}=\boxed{0{,}04}$

JUNIO 2020

SOLUCIÓN OPCIÓN B

Ejercicio 1: Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

a) Como es un problema de sistemas, indicamos que va a ser x, y, z:

x = el precio del kg de dorada

y= el precio del kg de lubina

Y ahora sacamos las ecuaciones. Tiene que haber 3:

z= el precio del kg de rodaballo

$$\begin{cases} 13740000x + 23440000y + 7400000z = 275800000 \\ 7400000z = 63600000 \\ x = y + 0{,}11 \end{cases}$$

De la ecuación 2, podemos sacar la z:

$$z = \frac{63600000}{7400000} = \boxed{8{,}59€/kg}$$

Ahora sustituimos en la primera ecuación, tanto la x como el valor de z:

$$13740000(y + 0{,}11) + 23440000y + 7400000 \cdot 8{,}59 = 275800000$$

$$13740000y + 1511400 + 23440000y + 63566000 = 275800000$$

$$37180000y = 210722600 \qquad \boxed{y = 5{,}67€/\text{kg}}$$

Y ahora sacamos x con la tercera ecuación:

$$x = 5{,}67 + 0{,}11 = \boxed{5{,}78€/kg}$$

Ejercicio 2: Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si\ x \leq 1 \\ (x-1)^3 & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4,4]$.

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4,4]$.

c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en x = 1.

a) El primer tramo y el segundo son funciones polinómicas, así que son continuas en sus trozos. Vamos a ver si también son continuas en x =1: En x =1

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = (1-1)^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} (x-1)^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^3 = 0 \end{array}\right\} \quad Como\ f(1) = \lim_{x\to 1^-} (x-1)^2 = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^3$$ También es continua en x=1

Por tanto la función es continua en el intervalo $[-4,4]$.

b) Hacemos la primera derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & si\ x < 1 \\ 3(x-1)^2 & si\ x > 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} 2(x-1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 3(x-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \quad Como \lim_{x\to 1^-} 2(x-1) = \lim_{x\to 1^+} 3(x-1)^2\ es\ derivable\ en\ x = 1$$

Por tanto la función es derivable en el intervalo $[-4,4]$

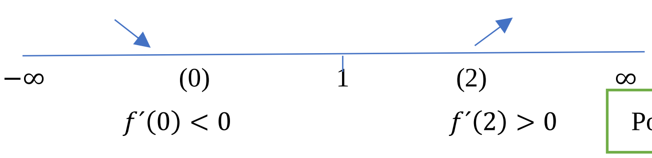
Ahora estudiamos el crecimiento y decrecimiento. Para ello necesitamos la primera derivada y la igualamos a cero, para saber si hay algún máximo o mínimo:

$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & si\ x < 1 \\ 3(x-1)^2 & si\ x > 1 \end{cases}$ Cogemos cada rama y la igualamos a cero:

$2(x-1) = 0; \quad x-1 = 0; \quad x = 1$

$3(x-1)^2 = 0; \quad x = 1$

Nos vamos a la recta real y colocamos x=1 y cogemos un valor de cada intervalo y sustituimos en la derivada:



Por tanto la función decrece de $(-\infty, 1)$ $y\ crece\ de\ (1, \infty)$

c) $g(x) = \begin{cases} 2(x-1) & si\ x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & si\ x > 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = 2(1-1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} 2(x-1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 3(x-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \quad Como\ g(1) = \lim_{x\to 1^-} 2(x-1) = \lim_{x\to 1^+} 3(x-1)^2$$

$la\ función\ es\ continua\ en\ x = 1$

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & si\ x \leq 1 \\ 6(x-1) & si\ x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 6(x-1) = 0 \end{array}\right\} \quad Como \lim_{x\to 1^-} 2 \neq \lim_{x\to 1^+} 6(x-1)$$

$No\ \ es\ derivable\ en\ x = 1$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos P(-3,1,2) y Q(-1,0,1) y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.

b) (1 punto) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

a) Primero calculamos una recta que sea perpendicular a π y que pase por Q

$\vec{r} = \overrightarrow{n_\pi} = (1,2,-3);\quad Q(-1,0,1)$ Hago la recta paramétrica:

$$r:\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

Después hallamos punto de corte entre r y π. Le vamos a llamar M y este es la proyección de Q sobre π.

$$(-1+\lambda) + 2\cdot(2\lambda) - 3\cdot(1-3\lambda) = 4;\quad -1+\lambda+4\lambda-3+9\lambda = 4;\quad 14\lambda = 4+4;\ \lambda = \frac{4}{7}$$

$$r:\begin{cases} x = -1 + \frac{4}{7} \\ y = 2\cdot\frac{4}{7} \\ z = 1 - 3\cdot\frac{4}{7} \end{cases}\qquad \begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ y = \frac{8}{7} \\ z = -\frac{5}{7} \end{cases};\quad \boxed{M\left(-\frac{3}{7},\frac{8}{7},-\frac{5}{7}\right)}$$

b) Como es paralelo a π, el vector normal de π también lo será de mi plano, además pasa por P

$\overrightarrow{n_\pi} = (1,2,-3);\ \ P(-3,1,2)$. Utilizamos la fórmula general del plano: $Ax + By + Cz + D = 0$

$x + 2y - 3z + D = 0;\quad -3 + 2\cdot 1 - 3\cdot 2 + D = 0;\quad D = 7$

$$\boxed{\propto: x + 2y - 3z + 7 = 0}$$

c) Como quiero un plano perpendicular a π, el vector normal de π será vector director del plano. Además pasa por los puntos P y Q.

$\vec{\alpha} = \overrightarrow{n_\pi} = (1,2,-3);\ \ P(-3,2,1);\ \ Q(-1,0,1)$

Necesitamos dos vectores directores para hacer un plano. Sacamos el vector $\overrightarrow{PQ}(2,-2,0)$.

Y ahora hacemos la ecuación que queramos porque no especifican cuál:

$$\boxed{\propto\begin{cases} x = -1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}}$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran dos sucesos A y B tales que P(A) = 0,5, P(B) = 0,25 y $P(A\cap B) = 0{,}125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0,5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B ¿Son compatibles los sucesos C y A∪B?

b) (0,5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso A)

d) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{B}/A)$.

a) Si C es incompatible con A, entonces $P(C\cap A) = 0$

Si C es incpmpatible con B, entonces $P(C \cap B) = 0$

Me piden: $P((A\cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C))$

Haciendo la fórmula de la unión:

$$P\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) = P(C \cap A) + P(C \cap B) - P\big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big) = 0$$

Por lo tanto, los sucesos C y A∪B no son compatibles

b) Para que sean independientes, debe cumplirse que: $P(A\cap B) = P(A) + P(B)$

$0{,}125 = 0{,}5 \cdot 0{,}25$; $0{,}125 = 0{,}125$; si que se cumple y por tanto A y B son independientes

c) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$; $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

La fórmula de la unión es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}25 - 0{,}125 = 0{,}625$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}625 = \boxed{0{,}375}$$

d)

$$P\left(\frac{\bar{B}}{A}\right) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{0{,}5} = \frac{0{,}5 - 0{,}125}{0{,}5} = \boxed{0{,}75}$$